# 线性思维的陷阱

在我们的日常生活中大量存在着线性关系，或称正比关系。例如，如果买一加仑汽油花 \$3 美元，两加仑汽油就是 $\$3 \times 2 = \$6$ 美元；三加仑则是 $\$3 \times 3 = \$9$ 美元，如此等等。 这种现象导致人们经常把这种简单的线性关系的常识推广到非线性关系的领域，比如投资的领域。

财富积累的公式如下：

$$M = A\ (1 + R)^{T}$$

式中

M - 累计的财富；
A - 本金 （初始投资额）；
R - 增长率；
T - 时间。

由此式可以看出，M 和 A 成简单的线性关系，如 A 增加 2 倍， M 也增加两倍。但是 M 同 R 、T 的关系就不是简单的线性关系，而是复杂的指数关系（乘方关系）。 为了形象地说明这两者的天壤之别，让我用故事来说明。

据说国际象棋是一个叫西塔的学者在古印度北部的一个王国里发明的。由于这个游戏千变万化，极富趣味性，深受人们包括国王的喜爱。有一天国王心情 很好，决定奖励这个聪明的学者。

学者应召前来，国王说，“你可以挑选任何奖品，只要你说出口，我一定会满足你的任何要求。”

学者犹豫了一会儿，然后缓缓地说，

“陛下，我只要你在象棋棋盘的第一个方格里放一个麦粒给我，然后，在第二个方格里放两粒。接着，在第三个方格里放四粒，然后依此类推，一直放到 最后的第六十四个方格。然后就结束了。”

国王有些不悦，心想，这不是太藐视他的财富了吗？于是吩咐宰相，“去粮库取一袋麦子赏给他吧。” 没想到这个学者倒倔强的很，他回答，“不，陛下。我只要我应该得到的麦子，少一粒不够，多一粒不取。”

国王无奈，说过的话又不好收回，只得命令大臣计算全部麦粒的数目，然后再赏给学者。

吩咐完毕，国王就回寝宫休息了。 第二天，国王见到大臣，想起了昨天奖赏之事，就问应该奖励的麦子是否如数交给那个穷酸的学者了。万万没有想到的是， 大臣回答，“尊敬的陛下，您的臣子们正在夜以继日、不知疲倦地计算应该奖励的麦粒数目呢！”

“什么???!!!奖赏还没拿走？？？”

没想到过了整整三天，国王的首辅大臣才战战兢兢地向国王秉告，“尊敬的陛下,您的粮库里没有足够的麦子支付您的奖赏，不但王室的粮库里的麦子不够，全国的也不够。为了给出学者所要的全部麦子，您必须命令抽干全世界所有的大海和湖泊，削平全世界所有的崇山峻岭，改作良田，就是如此，也还是不够！！！”

那么，这是一个多大的数字呢？ 它是：

**18,446,744,073,709,551,616！！！**

这么多的麦子会有多重呢？假设每个麦粒的平均重量为 0.03 克，那么这么多麦子的总重量就是 553,402,332,211,287 公斤，或 553,402,322,211 吨。如果还是没有清晰的概念的话，让我们进一步算一算要多大的粮仓才能装得下这么多麦子。

我们知道一立方米的容积大约可以储存 15,000,000 粒麦子,假设储粮库的尺寸为 高 4 米，宽度 10 米， 那么，粮仓的长度要有 300,000,000 公里。这个长度是地球直径的 23,544 倍，或者是地球到月球距离的 780 倍，或者是地球到太阳距离的整好 2 倍！ 难怪首辅大臣说即使抽干全世界所有的大海和湖泊，削平全世界所有的崇山峻岭，改作麦田，所有的收成，也还是不够呢。

印度国王的错误在于他的直觉是运用了**线性思维**。就是今天的我们，也许一开始知道这个数会很大，但是大到如此程度，也是始料不及的吧。

认识到线性思维的结果与非线性思维差别巨大，这一认知如此重要，为了加深读者的印象，让我们再以另一个例子加以比较。

四月底的一个黄昏，一位富翁的家里来了一位陌生人，他对主人说，“我手里刚好有一笔巨款，让我们作一笔交易： 从五月一日开始，我每天早晨给你送来十万美元，你呢，作为回报，只需给我一个美分。第二天早晨我还会来送上十万美元，你给我二美分。第三天我送给你十万美元，你给我四美分。 以后每天都照此办理，如何？”

富翁心想这不是天上掉馅饼吗？于是高高兴兴地与陌生人签了合同。以下我们列出在几个关键的时间点，富翁和陌生人各自的累积所得：

| 天 数 | 富翁累积所得 | 陌生人累积所得 |
|---|---|---|
| 01 | $100,000 | $0.01 |
| 10 | $1,000,000 | $10.23 |
| 20 | $2,000,000 | $10,485.75 |
| 30 | $3,000,000 | $10,737,418.23 |
| 31 | $3,100,000 | $21,474,836.47 |

合同进行到第 10 天的时候，富翁已经得到了 100 万元，而他的付出只有区区的 $10.23 元，他净赚 $999,989.77！他有点儿后悔： 为什么 当初不签订两个月或更长时间的合同呢？

到了第 20 天，富翁得到了 200 万元，他的支出为 $10,485.75，虽然仍旧净赚 $1,989,514.25, 但是他的支出从第 10 天的仅 10 元多一下子升高到万元之多，速度明显加快了。

随着时间的推移，事情迅速在起变化。到了第 28 天，他的收支勉强相抵，但他毕竟还净赚了十万多（$115,645.45）。

想不到的是，仅仅一天以后，他扭赢为亏，第 29 天他的净亏损为 200 多万（$2,468,709.11）。 第 30 天净亏损 $7,737,418.23。 而到了最后一天， 他的净亏损已达天文数字的一千八百多万元 ($18,374,836.47)！ 富翁彻底破产了，可是 20 天以前他还想延长合同呢。

**一切都发生在最后几天！**而这就是非线性的指数增长的奇迹。再重复一遍，**投资总得与增长率和时间是指数关系，而这一奇妙增长的出人意料的 戏剧性变化却只出现在最后。**

上述两个故事都是我小时候在一本苏联有名的科普作家别莱利曼的《活的数学》里读到的，当时就感到震惊，留下了深刻的印象，所以至今不忘。这一类大数的增长规律可以解释自然界里许多现象，比如细菌的繁殖、动物以及人口的无限制增长，甚至谣言的广泛传播等等。

第一个故事中的大数

### 18,446,744,073,709,551,616

是国王的大臣们用了三天三夜辛辛苦苦地算出来的。今天的一个小学生只需使用一个小小的能够计算乘方的科学计算器，用半秒的时间就可以得到精确的答案。

这个大数不过就是 2 的 64 次方，即 $\mathbf{2^{64}}$**，** 而已,。 可见非线性的乘方（指数）关系与线性关系的区别有多大！

不妨指出，别莱利曼犯了一个小小的错误，其实。仅在棋盘最后一个方格里的麦粒就有 18,446,744,073,709,551,616（$2^{64}$）粒，在第 63 格里有 $2^{63}$粒。那么，整个棋盘的全部麦粒就是

$$\sum_{i=0}^{64} 2^{i}$$

就是 $2^{0} + 2^{1} + 2^{2} + 2^{3} + \cdots\cdots + 2^{64}$. 那么，总麦粒数就更大了。

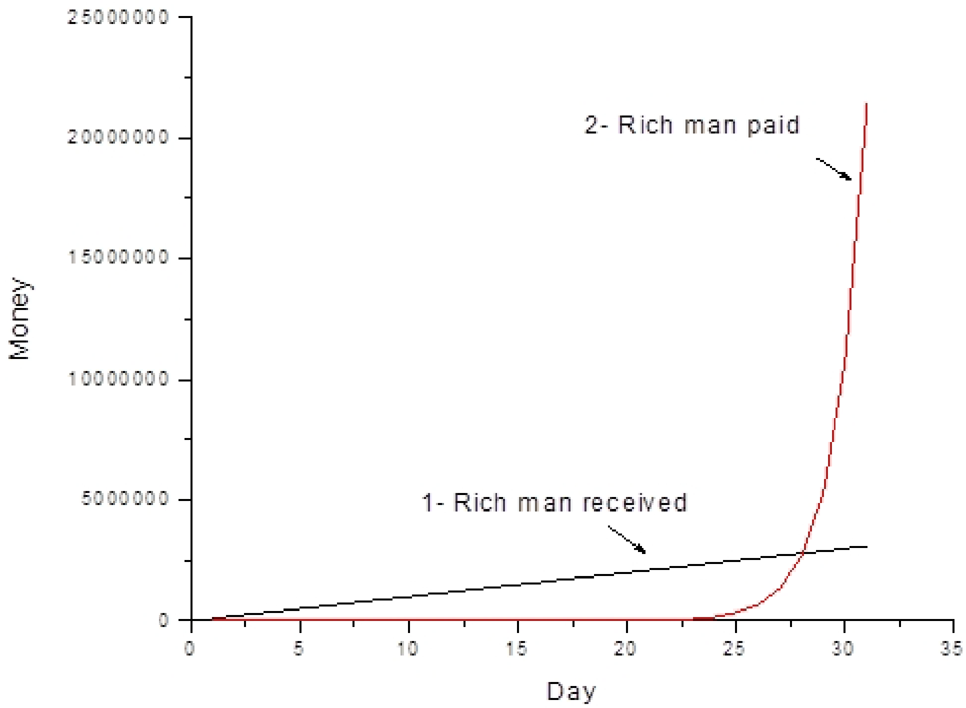
有人曾问过伟大的爱因斯坦，什么是有史以来人类最伟大的发明，出乎大多人的预料，爱因斯坦的回答只有两个字，“复利” （Compound Interest）， 也就是“利滚利”。

如何让人类的这个最伟大的发明为你服务，还要我多说吗？

下面我把富翁的收入和支出用更直观的曲线图一来表示，图中，黑线 1 是富翁所得款项的累积结果，它与时间的关系是一条直线，故称线性关系。 红曲线 2

是富翁所付款项累积的结果，它显然不是一条直线。其特点是： 在初期和中期，它的数值极低，曲线几乎与时间轴重合。而在第 27 天以后， 曲线突然转头向上，急剧上升。

在此图中，增长率 R = 100%， 这当然是一种极其特殊的情形。在 R 较小时，曲线上升幅度变缓，但是总的趋势却是一样的。




图一. 富人累积所得及付出曲线的比较。

1 – 富人累积收到的； 2 – 富人累计支付的

下面的图二和图三分别给出了著名的微软公司和特斯拉公司十年来股价的走势图。


图二. 微软公司十年来股价的走势图（2012 – 2022）。


图三. 特斯拉公司十年来股价的走势图（2012 – 2022）。

具体走势当然各不相同，但是都呈现非线性、指数关系的趋势，时间越向后，越出现快速、急剧上升的势头。 因此，**对时间因素在投资上的 重要性，是怎么强调也不过分的。**

石 泓 2016 于亚特兰大。 2021 年 4 月 15 日 修改，加图。